УДК 517.926.4

# ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СПЕКТРА

# DEGENERATING SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS. ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF SPECTRUM

**В.П. Архипов, А.В. Глушак**
**V.P. Arhipov, A.V. Glushak**

*ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева», Россия, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95*

*Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85*

*Oryel State University named after I.S. Turgenev, 95 Komsomolskaj St, Oryel , 302026, Russia*

*Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia*

*E-mail: varhipov@ inbox.ru, Glushak@.bsu.edu.ru*

*Аннотация.* Для обыкновенных линейных вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка рассматривается метод построения асимптотических представлений решений, позволяющий исследовать их в комплексной плоскости и в зависимости от параметра. Получены формулы решений, оценки резольвенты задачи Дирихле, условия дискретности спектра и асимптотические формулы для нахождения собственных значений. Для сильных степенных вырождений даны асимптотические формулы роста собственных значений.

*Resume.* Here is considering the method of building asymptotic solution views of ordinary linear degenerating second-order differential equations which allows to research them in complex surface and depending of parameter. There have been got formulas of solutions, resolvent estimates for Dirichlet problem, discrete spectrum condition and asymptotic formulas for eigenvalue findings. For strong power degeneracy there asymptotic formulas of eigenvalues growth have been given.

*Ключевые слова*: вырождающиеся дифференциальные уравнения, асимптотические последовательности, краевые задачи, собственные значения.

*Key words*: degenerating differential equations, asymptotic sequences, boundary value problems, eigenvalues.

## Введение

Настоящая статья является продолжением работы «Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений» [1], в которой приведены необходимые предварительные результаты для выяснения спектральных свойств оператора Штурма-Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$(a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + c(t,\lambda)u(t) = f(t), \qquad (1)$$

допускающего в точке $t = 0$ вырождение старшего коэффициента, поскольку $a(0) = 0$. Сохраняя для единообразия нумерацию формул первой части напомним необходимые определения и формулы.

Введем в рассмотрение дифференциальный оператор $L$, заданный для уравнения (1) при $c(t,\lambda) = c(t) - \lambda$ простейшей двухточечной краевой задачей Дирихле на отрезке [0,1]

$$Lu - \lambda u \equiv (a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + (c(t)-\lambda)u(t) = f(t), \quad a(0)=0, \quad a(t)>0 \text{ при } t \neq 0, \quad b(0) = b_0 \neq 0 \qquad (38)$$

с достаточно гладкими действительными коэффициентами, $\lambda = const$ на функциях $u(t)$, удовлетворяющих краевым условиям (см. [2], [3])

$$u(0) = \sigma_1 u'(1) + \sigma_2 u(1) = 0, \ |\sigma_1| + |\sigma_2| \neq 0, \ \sigma_1 = 0 \text{ при } \sigma_2 = 1, \text{если } b_0 < 0, \tag{39}$$

при $b_0 > 0$ условие в точке $t = 0$ снимается (заменяется условием ограниченности)

$$\overline{\lim_{t \to 0}} |u(t)| \neq \infty, \ \sigma_1 u'(1) + \sigma_2 u(1) = 0, |\sigma_1| + |\sigma_2| \neq 0, \ \sigma_1 = 0 \text{ при } \sigma_2 = 1. \tag{40}$$

Как и ранее, ограничимся рассмотрением задачи (38), (39) и найдем условия, позволяющие получать асимптотические формулы распределения собственных значений. Укажем эти формулы для сильных степенных вырождений.

### Асимптотика спектра

Результаты теоремы 2 [1] показывают, что резольвента задачи (38), (39) при $b + a'(0) < 0$ является вполне непрерывным оператором с дискретным простым спектром, т.е., спектр оператора $L$ краевой задачи (38), (39) состоит из простых действительных собственных значений $\{\lambda_k\}$ (см. также [4], [5]) таких, что $\lambda_k \to -\infty$ при $k \to \infty$. Задача Штурма-Лиувилля заключается в определение значений параметра $\lambda = \lambda_k$ при которых существуют нетривиальные решения однородной задачи (38), (39)

$$Lu - \lambda u \equiv (a(t)u')' + b(t)u' + c(t)u - \lambda u = 0, \ a(0) = 0, \ a(t) > 0, t \neq 0; b(0) < 0, \tag{45}$$

$$u(0) = \sigma_1 u'(1) + \sigma_2 u(1) = 0, |\sigma_1| + |\sigma_2| \neq 0, \ \sigma_1 = 0 \text{ при } \sigma_2 = 1.$$

В силу теоремы 1 [1], общее решение уравнения (45) имеет вид

$$u(t,\lambda) = C_1 u_1(t,\lambda) + C_2 u_2(t,\lambda) \tag{46}$$

и, так как $u_2(0,\lambda) = 0$ при $b(0) < 0$, то $C_1 = 0$. Таким образом, уравнение для определения собственных значений оператора $L$ задачи Дирихле (38), (39), а также и для задачи Дирихле (38), (40), выглядит следующим образом

$$u_2(1,\lambda) = v_2(1,t',\lambda) \cdot (F_{11}(0,1,\lambda) - F_{12}(0,1,\lambda) \cdot e^{w(1,t',\lambda)}) = 0. \tag{47}$$

Функции $F_{11}(0,t,\lambda), F_{12}(0,t,\lambda)$ в (47) определены в (10), (12), а

$$w(t,t',\lambda) = \int_t^{t'} \frac{\alpha(\tau,\lambda)}{a(\tau)} d\tau \text{ при } \alpha(t,\lambda) = (b^2 - 4a(t)(c-\lambda))^{1/2} \neq 0, \ \alpha(0,\lambda) = |b|.$$

Как и в теореме 2 [1] выберем $t' = 1$ в (47) и получим уравнение для определения собственных значений в удобном виде

$$F_{11}(0,1,\lambda) - F_{12}(0,1,\lambda) = 0. \tag{48}$$

Как следует из теоремы 1 [1], уравнение (45) имеет решение, представимое равенством (46), для всех точек $t$, соединённых с точкой $t = 0$ простой кусочно-гладкой кривой $\gamma$ на которой $\alpha(t,\lambda) = (b^2 - 4a(t)(c-\lambda))^{1/2} \neq 0$. В условиях монотонности $a(t)$ ($a'(t) > 0, t > 0$) это условие при $t \in [0,1]$ не может быть выполнено при $\lambda \to -\infty$, что делает выбор в формуле (46) и в уравнении (48) пути интегрирования $\gamma = [0,1]$ невозможным. Таким образом, в (48) необходимо использование пути интегрирования соединяющего точки $t = 0$ и $t = 1$ с выходом в комплексную плоскость. Определим точку $t_\lambda \in (0,1)$, как ближайшее к $t = 0$ решение уравнения

$$\alpha^2(t_\lambda,\lambda) = b^2 - 4a(t_\lambda)(c-\lambda) = 0\,. \tag{49}$$

Для монотонной $a(t)$ и постоянных $b, c$ точка $t_\lambda$ находится однозначно при $\lambda < \lambda_{01} = c - \dfrac{b^2}{4a(1)}$.

Покажем возможность преобразования уравнения (48) и построения асимптотических формул для определения собственных значений задачи Дирихле (38), (39) при постоянных коэффициентах $b = const < 0,\ c = const$.

Выберем путь интегрирования $\gamma \in \Omega$, выходящий из точки $t = 0$ вдоль отрезка $[0,1]$ и подходящий в точке $t = 1$ также по этому отрезку. А именно:

$$\gamma = \gamma_\lambda = [0, t^-_{\lambda\delta}] \cup \gamma_{\lambda\delta} \cup [t^+_{\lambda\delta}, 1] \in \overline{\Omega}, \tag{50}$$

где $\gamma_{\lambda\delta} = \{t : t - t_\lambda = \delta \cdot e^{i\psi},\quad -\pi \le \psi \le 0,\quad \delta > 0\}$ $t^-_{\lambda\delta} = t_\lambda - \delta$, $t^+_{\lambda\delta} = t_\lambda + \delta$ для некоторого $\delta : 0 < \delta < \min\left(\dfrac{t_\lambda}{2}, \dfrac{1-t_\lambda}{2}\right)$, считая для определенности что $\Omega = \left\{ t = re^{i\psi}, -\dfrac{\pi}{6} < \psi < \dfrac{\pi}{6}, r < 2 \right\}$ и $\lambda < \lambda_{01} = c - \dfrac{b^2}{4a(1)}$. Будем предполагать, что выполнено условие 3.

**Условие 3.** Пусть функция $a(t)$ удовлетворяет следующим требованиям:

1) принадлежит $C^2[0,1]$, $a(0) = 0,\ a'(t) \ge 0$, $a(t) > 0$ при $t \in (0,1]$,

2) допускает аналитическое продолжение в $\Omega = \left\{ t = re^{i\psi}, -\dfrac{\pi}{6} < \psi < \dfrac{\pi}{6}, r < 2 \right\}$, так, что $a(t) \ne 0$ и $\operatorname{Im} a(t) \le 0$ при $t \in \gamma_\lambda \setminus \{0\}$ и $\alpha(t,\lambda) = (b^2 - 4a(t)(c-\lambda))^{1/2} \ne 0$ при $t \in \gamma_\lambda \subset \Omega$, $\alpha(0,\lambda) = |b(0)|$.

Условие 3 в наших предположениях о коэффициентах уравнения обеспечивает справедливость утверждений сформулированных в леммах 1 – 4. Действительно, $w(t) = w(t,\lambda) = \int_t^1 \dfrac{\alpha(\tau,\lambda)}{a(\tau)} d\tau$, $\lim\limits_{t\to 0,\, t\in\gamma_\lambda} \operatorname{Re} w(t) = +\infty$, функция $h(t) = h(t,\lambda) = \dfrac{\alpha^{-1}(t,\lambda t)}{4} \cdot \left( a(t)\left(\dfrac{\alpha'(t,\lambda t)}{\alpha(t,\lambda)}\right)^2 - 2\left(a(t)\dfrac{\alpha'(t,\lambda t)}{\alpha(t,\lambda)}\right)' \right)$ непрерывна на $\gamma_\lambda$ и интеграл $\varepsilon(0,1,\lambda) = \int_0^1 |h(t_1,\lambda)|\, dt_1 < \infty$ сходится.

Уравнение (48) можно несколько упростить за счет свойств симметрии матрицы $F(t_1, t_2)$, связывающих две произвольные точки $t_1$ и $t_2$ кривой $\gamma_\lambda$, расположенные на действительной оси. По свойству симметрии г) (см. (16) [1]) в этом случае $F(t_1,t_2) = B(t_1)\overline{F}(t_1,t_2)\overline{B}(t_2)$, где $B(t)$ – матрица перехода к комплексно сопряженным функциям $\overline{v}_k(t)$: $(\overline{v}_1(t), \overline{v}_2(t)) = (v_1(t), v_2(t))B(t)$, $B^{-1} = \overline{B}$. Т.к.

$$v_1(t) = \alpha^{-1/2}(t)\exp\left\{\int_t^1 \frac{b(\tau)+\alpha(\tau,\lambda)}{2a(\tau)} \cdot d\tau\right\},\quad v_2(t) = \alpha^{-1/2}(t)\exp\left\{\int_t^1 \frac{b(\tau)-\alpha(\tau,\lambda)}{2a(\tau)}\, d\tau\right\},$$

$\alpha(t,\lambda)=(b^2-4a(t)(c-\lambda))^{1/2}$, $\alpha(0,\lambda)=|b|>0$, то найдем матрицу $B(t)$ для различных положений точки $t\in\gamma_\lambda\cap(0,1]$, считая $\tilde{\gamma}\subset(0,1]$, что возможно при аналитичности продолжения $a(t)$.

Пусть $\alpha^2(t,\lambda)=b^2-4a(c-\lambda)=\sigma\cdot e^{i\varphi}$, $\sigma=|\alpha^2(t,\lambda)|=|b^2-4a(c-\lambda)|$ $(0\le\varphi\le\pi)$, тогда

$$\alpha(t,\lambda)=\alpha(t)=(b^2-4ac)^{1/2}=\sigma^{1/2}e^{i\varphi/2},\ ,\ \alpha^{-1/2}(t)=(b^2-4ac)^{-1/4}=\sigma^{-1/4}e^{-i\varphi/4},\ 0\le\varphi\le\pi.$$

При $t\in[0,t_{\lambda\delta}^-]\Rightarrow\varphi=0,\ \alpha(t)=\sigma^{1/2};\ \alpha^{-1/2}(t)=\sigma^{-1/4}$, $t\in[t_{\lambda\delta}^+;1]\Rightarrow\varphi=\pi,\alpha(t)=i\sigma^{1/2},\alpha^{-1/2}(t)=\sigma^{-1/4}e^{-\pi i/4}$.

На кривой $\gamma_\lambda$ два действительных участка. Рассмотрим их отдельно.

Пусть $t\in[t_{\lambda\delta}^+;1]$ $(\alpha^2(t)<0)$, $\alpha(t)=i\sigma^{1/2}$, $\alpha^{-1/2}(t)=\sigma^{-1/4}e^{-\pi i/4}=|\alpha|^{-1/2}e^{-\pi i/4}$. Тогда

$$v_1(t)=e^{-i\pi/4}|\alpha|^{-1/2}\exp\left\{\int_t^1\frac{b+i|\alpha(\tau)|}{2a(\tau)}d\tau\right\},\qquad v_2(t)=e^{-i\pi/4}|\alpha|^{-1/2}\exp\left\{\int_t^1\frac{b-i|\alpha(\tau)|}{2a(\tau)}d\tau\right\},$$

$$\overline{\exp\left\{\int_t^1\frac{b\pm i|\alpha(\tau)|}{2a(\tau)}d\tau\right\}}=\exp\left\{\int_t^1\frac{b}{2a(\tau)}d\tau\right\}\cdot\exp\left\{\mp i\int_t^1\frac{|\alpha(\tau)|}{2a(\tau)}d\tau\right\},$$

$$\bar{v}_1(t)=e^{i(\pi/2-\pi/4)}|\alpha|^{-1/2}\exp\left\{\int_t^1\frac{b-i|\alpha(\tau)|}{2a(\tau)}d\tau\right\}=iv_2(t),\quad \bar{v}_2(t)=e^{i(\pi/2-\pi/4)}|\alpha|^{-1/2}\exp\left\{\int_t^1\frac{b+i|\alpha(\tau)|}{2a(\tau)}d\tau\right\}=iv_1(t).$$

Для $t\in[t_{\lambda\delta}^+,1]$ имеем $(\bar{v}_1(t),\bar{v}_2(t))=(v_1(t),v_2(t))\cdot B=(v_1(t),v_2(t))\cdot i\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$,

$$B=i\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad B^{-1}=-i\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\bar{B}.$$

Пусть теперь $t\in(0,t_{\lambda\delta}^-]$ $(\alpha^2(t)>0)$, тогда $\alpha(t)=\sqrt{\alpha^2(t)}=|\alpha(t)|>0$, $\alpha^{-1/2}(t)=\overline{\alpha^{-1/2}(t)}>0$ . Далее

$$v_1(t)=|\alpha|^{-1/2}\exp\left\{\int_t^1\frac{b(\tau)+\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}=|\alpha|^{-1/2}\exp\left\{\int_t^{t_\lambda}\frac{b(\tau)+\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}\exp\left\{\int_{t_\lambda}^1\frac{b(\tau)+i|\alpha(\tau)|}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\},$$

$$v_2(t)=|\alpha|^{-1/2}\exp\left\{\int_t^1\frac{b(\tau)-\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}=|\alpha|^{-1/2}\exp\left\{\int_t^{t_\lambda}\frac{b(\tau)-\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}\exp\left\{\int_{t_\lambda}^1\frac{b(\tau)-i|\alpha(\tau)|}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\},$$

$$\overline{v_1(t)}=|\alpha|^{-1/2}\exp\left\{\int_t^{t_\lambda}\frac{b(\tau)+\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}\exp\left\{\int_{t_\lambda}^1\frac{b(\tau)-i|\alpha(\tau)|}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}=$$

$$=|\alpha|^{-1/2}\exp\left\{\int_t^{t_\lambda}\frac{b(\tau)+\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}\exp\left\{\int_{t_\lambda}^1\frac{b(\tau)+i|\alpha(\tau)|}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}\exp\left\{\int_{t_\lambda}^1\frac{-i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\}=v_1(t)\exp\left\{\int_{t_\lambda}^1\frac{-i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\},$$

$$\overline{v_2(t,1)}=|\alpha|^{-1/2}\exp\left\{\int_t^{t_\lambda}\frac{b(\tau)-\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}\exp\left\{\int_{t_\lambda}^1\frac{b(\tau)+i|\alpha(\tau)|}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right\}=v_2(t)\exp\left\{\int_{t_\lambda}^1\frac{i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\}.$$

Для $t\in(0;t_{\lambda\delta}^-]$ имеем $(\bar{v}_1(t),\bar{v}_2(t))=(v_1(t),v_2(t))\cdot\begin{pmatrix}\exp\left\{\int_{t_\lambda}^1\frac{-i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\}&0\\0&\exp\left\{\int_{t_\lambda}^1\frac{i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\}\end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix} \exp\left\{\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{-i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\} & 0 \\ 0 & \exp\left\{\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\}\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix} \exp\left\{\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\} & 0 \\ 0 & \exp\left\{\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{-i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\}\end{pmatrix}=\overline{B}.$$

Возвращаясь вновь к формуле (16) запишем её для $t_1\in(0,t_{\lambda\delta}^{-}]$, $t_2\in[t_{\lambda\delta}^{+},1]$, учитывая полученные выше формулы для матрицы $B(t)$. Получим

$$F(t_1,t_2)=B(t_1)\overline{F}(t_1,t_2)\overline{B}(t_2)=\begin{pmatrix} -i\exp\left\{\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{-i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\}\overline{F}_{12}(t_1,t_2) & -i\exp\left\{\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{-i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\}\overline{F}_{11}(t_1,t_2) \\ -i\exp\left\{\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\}\overline{F}_{22}(t_1,t_2) & -i\exp\left\{\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\}\overline{F}_{21}(t_1,t_2)\end{pmatrix}$$

или $$F_{11}(t_1,t_2)=-i\exp\left\{\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{-i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\}\overline{F}_{12}(t_1,t_2),\qquad F_{12}(t_1,t_2)=-i\exp\left\{\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{-i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\}\overline{F}_{11}(t_1,t_2),$$

$$F_{21}(t_1,t_2)=-i\exp\left\{\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\}\overline{F}_{22}(t_1,t_2),\qquad F_{22}(t_1,t_2)=-i\exp\left\{\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\}\overline{F}_{21}(t_1,t_2).$$

Наибольший интерес представляет соотношение $F_{12}(t_1,t_2)=-i\exp\left\{\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{-i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\}\overline{F}_{11}(t_1,t_2)$,

которое в силу непрерывности на $[0,1]$ (лемма 3) для $t_2\in[t_{\lambda\delta}^{+},1]$ принимает вид

$$F_{12}(0,t_2)=-i\exp\left\{\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{-i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\}\overline{F}_{11}(0,t_2). \tag{51}$$

Подставив (51) в (48)) при $t_2=1$ получим $F_{11}(0,1,\lambda)+i\overline{F}_{11}(0,1,\lambda)\exp\left\{-i\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{|\alpha(\tau,\lambda)|}{a(\tau)}d\tau\right\}=0$ или

$$F_{11}(0,1,\lambda)=-i\overline{F}_{11}(0,1,\lambda)\exp\left\{-i\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{|\alpha(\tau,\lambda)|}{a(\tau)}d\tau\right\}. \tag{52}$$

Два комплексных числа равны, когда их аргументы отличаются на $2\pi k$, поэтому

$$\arg F_{11}(0,1,\lambda)=-\frac{\pi}{2}-\arg F_{11}(0,1,\lambda)-\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{|\alpha(\tau,\lambda)|}{a(\tau)}d\tau+2\pi k,$$

$$\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{|\alpha(\tau,\lambda)|}{a(\tau)}d\tau+\frac{\pi}{2}+2\arg F_{11}(0,1,\lambda)=2\pi k,\qquad \left|\alpha^2(\tau,\lambda)\right|=4a(\tau)(c-\lambda)-b^2\ge 0.$$

Уравнение для собственных значений (52) теперь имеет вид

$$\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{\sqrt{4a(\tau)(c-\lambda)-b^2}}{a(\tau)}d\tau+\frac{\pi}{2}+2\arg F_{11}(0,1,\lambda)=2\pi k. \tag{53}$$

Мы хотим установить, какова скорость возрастания(убывания) слагаемых в (53) при $\lambda\to-\infty$. Оценка функции $F_{11}(t,t_0)$ дана в лемме 2 при условии монотонности (не возрастания) $\operatorname{Re}w(t)=\operatorname{Re}w(t,\lambda)=\operatorname{Re}\int\limits_{t}^{1}\frac{\alpha(\tau,\lambda)}{a(\tau)}d\tau$ на кривой $\gamma=\gamma_\lambda$, обходящей по полуокружности $\gamma_{\lambda\delta}$ ноль функции $\alpha^2(t,\lambda)=b^2-4a(t)(c-\lambda)$, точку $t=t_\lambda$. Требуемый характер монотонности, очевидно, выполнен на $[0,t^-_{\lambda\delta}]$ и $[t^+_{\lambda\delta},1]$, а на $\gamma_{\lambda\delta}$ при малых $\delta>0$ и каждом $\lambda$ существует только одна точка минимума функции $\operatorname{Re} w(t)$ – это $t^*\in\gamma_{\lambda\delta}$. Вблизи точки $t_\lambda$ функция $\dfrac{\alpha(\tau,\lambda)}{a(\tau)}$ при каждом $\lambda$ эквивалентна $(\tau-t_\lambda)^{1/2}$ и условие существования $t^*\in\gamma_{\lambda\delta}$ выполняется. Сформулируем это положение в виде условия на коэффициент $a(t)$ уравнения (1).

**Условие 4.** 1) При каждом $\lambda<\lambda_{02}\le\lambda_{01}$ и некотором $\delta=\delta_\lambda>0$ существует точка $t^*\in\gamma_{\lambda\delta}$ такая, что функция $\operatorname{Re} w(t,\lambda)$ не возрастает при движении точки $t$ вдоль кривой $\gamma_\lambda$ от точки 0 к точке $t^*$ и не убывает при движении от точки $t^*$ к точке $t=1$; 2) $\mu(\lambda)=\varepsilon(0,1)=\int\limits_0^1|h(t_1,\lambda)|\,dt_1\to 0$ при $\lambda\to-\infty$.

При выполнении условия 4 $\arg F_{11}(0,1,\lambda)\to 0$ при $\lambda\to-\infty$ и (53) может быть записано в виде

$$\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{\sqrt{4a(\tau)(c-\lambda)-b^2}}{a(\tau)}d\tau+\frac{\pi}{2}+o(1)=2\pi k \quad \text{при} \quad \lambda\to-\infty. \tag{54}$$

Действительно, пусть $t^*\in\gamma_{\lambda\delta}$ – точка из условия 4. Для точек $t_1, t_2, t^*\in\gamma_\lambda$, таких, что $t_1\in[0,t^-_{\lambda\delta}], t_2\in[t^+_{\lambda\delta},1]$ свойства симметрии (15) вместе с (51) приводят к равенству

$$F_{11}(t_1,t^*)=F_{11}(t_1,t_2)F_{11}(t_2,t^*)+F_{12}(t_1,t_2)F_{21}(t_2,t^*)=$$
$$=F_{11}(t_1,t_2)(F_{11}(t_2,t^*)-i\frac{\overline{F}_{11}(t_1,t_2)}{F_{11}(t_1,t_2)}F_{21}(t_2,t^*)\exp\left\{\int\limits_{t_\lambda}^{1}\frac{-i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\}.$$

Следовательно, $$F_{11}(t_1,t_2)-1=\frac{F_{11}(t_1,t^*)-1+1-F_{11}(t_2,t^*)+i\dfrac{\overline{F}_{11}(t_1,t_2)}{F_{11}(t_1,t_2)}F_{21}(t_2,t^*)\exp\left\{\int\limits_{t_\lambda}^{1}\dfrac{-i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\}}{1-(1-F_{11}(t_2,t^*))-i\dfrac{\overline{F}_{11}(t_1,t_2)}{F_{11}(t_1,t_2)}F_{21}(t_2,t^*)\exp\left\{\int\limits_{t_\lambda}^{1}\dfrac{-i|\alpha(\tau)|}{a(\tau)}d\tau\right\}}$$

и

$$|F_{11}(t_1,t_2)-1|\le\frac{|F_{11}(t_1,t^*)-1|+|F_{11}(t_2,t^*)-1|+|F_{21}(t_2,t^*)|}{1-|F_{11}(t_2,t^*)-1|-|F_{21}(t_2,t^*)|}. \tag{55}$$

При выполнении условия 4 для точек $t_1, t^*$ и $t_2, t^*$ выполнены условия леммы 2 и поэтому

$$|F_{11}(t_1,t^*)-1|\le\frac{1}{2}\left(e^{2\varepsilon(t_1,t^*)}-1\right)\le 2\varepsilon(t_1,t^*)\le 2\mu(\lambda),$$

$$|F_{11}(t_2,t^*)-1|\le\frac{1}{2}\left(e^{2\varepsilon(t_2,t^*)}-1\right)\le 2\varepsilon(t_2,t^*)\le 2\mu(\lambda) \text{ при } \mu(\lambda)\le 1,$$

$$|F_{21}(t_2,t^*)|\le\frac{1}{2}\left(e^{2\varepsilon(t_2,t^*)}-1\right)\cdot e^{\operatorname{Re} w(t_2)}\le 2\varepsilon(t_2,t^*)\le 2\mu(\lambda),\ \operatorname{Re} w(t_2,1)=0,$$

где $\mu(\lambda)=\varepsilon(0,1)=\int\limits_0^1|h(t_1,\lambda)dt_1|$, $w(t)=w(t,1)=\int\limits_t^1\dfrac{\alpha(\tau)}{a(\tau)}d\tau=w(t)$.

Если выполнено условие 4 (2), то при $\lambda \to -\infty$

$\varepsilon(t_{1,2}, t^*) \le \mu(\lambda) = \int\limits_0^1 \left| h(t_1, \lambda) dt_1 \right| \to 0$ и можно считать, что $\mu(\lambda) \le \frac{1}{8}$ при $\lambda \le \lambda^* < 0$. Тогда

$$1 - \left| F_{11}(t_2, t^*) - 1 \right| - \left| F_{21}(t_2, t^*) \right| \ge 1 - 2 \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{8} \ge \frac{1}{2},$$

т.е., знаменатель в (55) не равен нулю и $\left| F_{11}(t_1, t_2) - 1 \right| \le 12\mu(\lambda)$ при всех $t_1 \in [0, t_{\lambda\delta}^-], t_2, \in [t_{\lambda\delta}^+, 1]$.

Таким образом при выполнении условия 4 и $\lambda \to -\infty$ имеет место $\left| F_{11}(0,1) - 1 \right| \le 12\mu(\lambda) \to 0$ и

$\left| \arg F_{11}(0,1) \right| \to 0$, что приводит к (54). Таким образом, нами установлено следующее утверждение.

**Теорема 3.** Если коэффициенты краевой задачи Дирихле (38), (39) таковы, что выполнены условия 3 и 4 при $b = const, c = const$ и $b + a'(0) < 0$, то её собственные значения $\{\lambda_k\}, k = 0,1,2,\ldots$ действительны, $\lambda_k \to -\infty$ при $k \to +\infty$ и удовлетворяют асимптотическому равенству

$$\int\limits_{t_{\lambda_k}}^1 \frac{\sqrt{4a(\tau)(c - \lambda_k) - b^2}}{a(\tau)} d\tau + \frac{\pi}{2} - 2\pi k = o(1), \tag{56}$$

где $t_\lambda \in (0,1)$ определяется как решения уравнения (49).

**Замечание 5.** а) Условия 3 и 4 при $b = const, c = const$, которые нужны для выполнения асимптотического равенства (56) могут быть сформулированы в виде условий на коэффициенты уравнения (38), их гладкости, а также возможность продолжения с действительной оси в комплексную плоскость. Однако это лишь усложнит формулировки и доказательства. Возможно, непосредственная проверка этих требований, как будет показано ниже, окажется более эффективной. б) Условия 3 и 4 при $b = const, c = const$ рассматриваются как достаточные и могут быть довольно существенно ослаблены. Например, требование постоянства коэффициентов совершенно необязательно. в) Утверждение теоремы 3 сохраняется и для краевой задачи Дирихле (38), (40).

### Пример сильного степенного вырождения

Пусть в уравнении (45) $a(t) = t^m, m = 2,3,\ldots$ . Покажем, что для краевой задачи (38), (39), равно как и для задачи (38), (40), в этом случае выполнены условия теоремы 3 и вычислим асимптотику собственных значений.

**Теорема 4.** Краевая задача Дирихле (38), (39) при $a(t) = t^m$, $b = const < 0, c = const, m = 2,3,\ldots$ имеет дискретный спектр, её собственные значения $\{\lambda_k\}, k = 0,1,2,\ldots$ действительны, $\lambda_k \to -\infty$ при $k \to +\infty$ и выполняются следующие асимптотические соотношения: 1) при $m > 2$

$$\lambda_k = -\left( \frac{2\pi}{C_m} k - \frac{\pi}{2C_m} \right)^{m/(m-1)} (1 + o(1)) = -\left( \frac{2\pi}{C_m} \right)^{m/(m-1)} k^{m/(m-1)} (1 + o(1)), \quad C_m = \frac{B(3/2, (m-2)/(2m))}{m|b|^{1-2/m}};$$

2) при $m = 2$ $\quad |\lambda_k|^{1/2} \cdot \ln|\lambda_k| = 2\pi k + O(1), \lambda_k \to -\infty$.

**Доказательство.** Проверим, что если $a(t)=t^m$, то выполняются условия 3 и 4, т.е., условия теоремы 3, а затем преобразуем асимптотическое равенство (56).

Выполнение условия 3 очевидно. Выясним, когда выполняется условие 4. Для компактности преобразований введем $\eta = c-\lambda \geq 1$, тогда $\lambda \to -\infty \Leftrightarrow \eta \to +\infty$ и

$$\alpha(t,\lambda)=(b^2-4t^m(c-\lambda))^{1/2}=(b^2-4t^m\eta)^{1/2}=\alpha(t,\eta),\ \alpha(0,\eta)=|b|>0,\quad \alpha^2(t,\lambda)=\alpha^2(t,\eta).$$

Пусть, как и ранее, $\Omega=\left\{t=re^{i\psi},\ -\frac{\pi}{6}<\psi<\frac{\pi}{6},\ r<2\right\}$. Выберем в $\Omega$ путь интегрирования

$$\gamma_\lambda=\gamma_\eta=[0,t^-_{\eta\delta}]\cup\gamma_{\eta\delta}\cup[t^+_{\eta\delta},1]\subset\Omega\cup\{0\},\ \text{где}\ \gamma_{\eta\delta}=\{t: t-t_\eta=\delta\cdot e^{i\psi},\ -\pi\leq\psi\leq 0,\ \delta>0\},$$

$$t^-_{\eta\delta}=t_\eta-\delta,\ t^+_{\eta\delta}=t_\eta+\delta,\ 0<\delta<t_\eta,\ t_\eta:\alpha^2(t_\eta,\eta)=0,\ t_\eta=\left(\frac{b^2}{4\eta}\right)^{1/m}=t_\lambda\in\left(0,\frac{1}{2}\right],\ \eta\geq b^2\cdot 2^{m-2}.$$

Величину $\delta$ будем искать в удобном виде $\delta=\frac{t_\eta}{\Lambda}=\frac{1}{\Lambda}\left(\frac{b^2}{4\eta}\right)^{1/m}$, $\Lambda>1$ - параметр, определяемый в дальнейшем и $t^\pm_{\eta\delta}=t_\eta\pm\delta=\left(\frac{b^2}{4\eta}\right)^{1/m}\pm\delta=\left(\frac{b^2}{4\eta}\right)^{1/m}\left(1\pm\frac{1}{\Lambda}\right)\in(0,1]$. Функция

$$w(t,\lambda(=w(t,\eta(=\int_t^1\frac{\alpha(\tau,\eta)}{a(\tau)}d\tau=\int_t^1\frac{(b^2-4\tau^m\cdot\eta)^{1/2}}{\tau^m}d\tau$$

при определенном выборе $\delta$ удовлетворяет условию 4 (1). Точнее, при достаточно больших значениях $\eta$ возможен выбор пути интегрирования $\gamma_\eta=[0,t^-_{\eta\delta}]\cup\gamma_{\eta\delta}\cup[t^+_{\eta\delta},1]$ и величины $\delta=\frac{t_\eta}{\Lambda}$ (или некоторого $\Lambda>1$) так, чтобы выполнялось условие 4(1). Проверим, что при достаточно малых $\delta=\frac{t_\eta}{P}>0$ $(\Lambda=P)$ функция $I(t)=\operatorname{Re}w(t)$ не возрастает при движении от точки $t$ к некоторой точке $t^*\in\gamma_{\eta\delta}$ вдоль $\gamma_{\eta\delta}$ и не убывает при движении от точки $t^*$ к точке $t^+_{\eta\delta}$. Характер монотонности, очевидно, выполнен на $[0,t^-_{\eta\delta}]$ и $[t^+_{\eta\delta},1]$. Далее для $t\in\gamma_{\eta\delta}$ при каждом $\eta$ имеем

$$I(t)=\operatorname{Re}\int_t^1\frac{\alpha(\tau,\eta)}{a(\tau)}d\tau=\operatorname{Re}\int_t^{t^+_{\eta\delta}}\frac{\alpha(\tau,\eta)}{a(\tau)}d\tau+\operatorname{Re}\int_{t^+_{\eta\delta}}^1\frac{i|\alpha(\tau,\eta)|}{a(\tau)}d\tau=\operatorname{Re}\int_t^{t^+_{\eta\delta}}\frac{\alpha(\tau,\eta)}{a(\tau)}d\tau.$$

Проведем некоторые преобразования для функции $I(t)$ при $t=t_\eta+\delta e^{i\psi}\in\gamma_{\eta\delta},-\pi\leq\psi\leq 0$.

Отметим, что функция $\left(\frac{\alpha(t)}{a(t)}\right)^2$ аналитическая в $\Omega$ и имеет простой ноль в точке $t_\eta$, тогда

$$\left(\frac{\alpha(t)}{a(t)}\right)^2=a_1(t-t_\eta)W(t,\eta),\ W(t,\eta)=u(t,\eta)+iv(t,\eta),\ a_1=-\frac{4\eta\cdot a'(t_\eta)}{a^2(t_\eta)}<0\ \ (a'(t)>0),$$

$$\frac{\alpha(t)}{a(t)}=\sqrt{a_1(t-t_\eta)W(t,\eta)}=\frac{2\sqrt{\eta a'(t_\eta)\delta}}{a(t_\eta)}e^{i(\psi+\pi)/2}\sqrt{W(t_\eta+\delta e^{i\psi},\eta)}\,.$$

Функция $\sqrt{W(t,\eta)}=\widetilde{W}(\delta,\psi,\eta)=\widetilde{u}(\delta,\psi,\eta)+i\cdot\widetilde{v}(\delta,\psi,\eta)$ аналитическая в $\Omega\setminus\{t_\eta\}$ и

$$|W(\delta,\psi,\eta)|^2=u^2(\delta,\psi,\eta)+v^2(\delta,\psi,\eta)=(\widetilde{u}^2(\delta,\psi,\eta)+\widetilde{v}^2(\delta,\psi,\eta))^2=\left|\widetilde{W}(\delta,\psi,\eta)\right|^4. \qquad (57)$$

После замены $\tau-t_\eta=\delta\cdot e^{i\psi}$, $d\tau=\delta\cdot ie^{i\psi}d\psi$, $-\pi\le\psi\le 0$ получим

$$w(t)=\int_t^{t^+_{\eta\delta}}\frac{\alpha(\tau)}{a(\tau)}d\tau=w(\delta,\psi)=-\delta^{3/2}\int_\psi^0\frac{2\sqrt{\eta a'(t_\eta)}}{a(t_\eta)}e^{3i\psi/2}\sqrt{W(t_\eta+\delta e^{i\psi},\eta)}d\psi=$$

$$=-\frac{2\delta^{3/2}\sqrt{\eta a'(t_\eta)}}{a(t_\eta)}\int_\psi^0 e^{3i\psi/2}(\widetilde{u}(\delta,\psi,\eta)+i\cdot\widetilde{v}(\delta,\psi,\eta))\,d\psi.$$

Как было принято выше $\widetilde{W}(\delta,\psi,\eta)=\widetilde{u}(\delta,\psi,\eta)+i\cdot\widetilde{v}(\delta,\psi,\eta)$ и нетрудно видеть, что при малых $\delta$ $\widetilde{u}(\psi,\eta)\approx 1$ и $\widetilde{v}(\psi,\eta)\approx\pm 0$. Тогда для $-\pi\le\psi\le 0$ и $t^*\approx-\frac{\pi}{3}$

$$I(t)=I(\delta,\psi)\approx-\frac{2\delta^{3/2}\sqrt{\eta\cdot a'(t_\eta)}}{a(t_\eta)}\mathrm{Re}\int_\psi^0 e^{3i\psi/2}d\psi=\frac{4\delta^{3/2}\sqrt{\eta\cdot a'(t_\eta)}}{3a(t_\eta)}\sin\frac{3\psi}{2}$$

для $-\pi\le\psi\le 0$ и $t^*\approx-\frac{\pi}{3}$, т.е. при $\psi\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{3}\right]$ функция $I(t)$ не возрастает, а при $\psi\in\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$ не убывает. Условие 4(1) выполнено, хотя точно выбрать значение $t^*$ затруднительно.

Докажем существование и единственность при некотором $\delta=\delta^*$ точки $t^*=\delta^*\cdot e^{i\psi^*}$ с такими свойствами на $[-\pi;0]$. После замены переменной интегрирования $\tau-t_\eta=\delta\cdot e^{i\psi}$ получим

$$I(t)=I(\delta,\psi)=-\frac{2\delta^{3/2}\sqrt{\eta\cdot a'(t_\eta)}}{a(t_\eta)}\int_\psi^0\left(\widetilde{u}(\delta,\psi)\cos\frac{3\psi}{2}-\widetilde{v}(\delta,\psi)\sin\frac{3\psi}{2}\right)d\psi,$$

$$I'_\psi(\psi)=\frac{2\delta^{3/2}\sqrt{\eta a'(t_\eta)}}{a(t_\eta)}\left(\widetilde{u}(\delta,\psi)\cos\frac{3\psi}{2}-\widetilde{v}(\delta,\psi)\sin\frac{3\psi}{2}\right)=0\,.$$

Уравнение, определяющее точки $t^*$ и разделяющие участки монотонности функции $I(t)$ принимает вид

$$\widetilde{u}(\delta,\psi)\cos\frac{3\psi}{2}-\widetilde{v}(\delta,\psi)\sin\frac{3\psi}{2}=0 \text{ или } \mathrm{ctg}\frac{3\psi}{2}=\frac{\widetilde{v}(\delta,\psi)}{\widetilde{u}(\delta,\psi)} \qquad (58)$$

и при достаточно малых $\delta>0$ $\widetilde{u}(\delta,\psi)\approx 1$. Уравнение (58) можно переписать в виде

$$\psi=\frac{2}{3}\mathrm{arcctg}\,\frac{\widetilde{v}(\delta,\psi)}{\widetilde{u}(\delta,\psi)}-\frac{2\pi}{3}$$

на отрезке $\psi\in\left[-\frac{2\pi}{3},0\right]$ и геометрически очевидно существование единственного решения в точке $\psi^*\in\left[-\frac{2\pi}{3},0\right]$; а на отрезке $\psi\in\left[-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right]$ уравнение (58) принимает вид

$$\psi=\frac{2}{3}\operatorname{arcctg}\frac{\tilde v(\delta,\psi)}{\tilde u(\delta,\psi)}-\frac{4\pi}{3}$$

и при малых $\delta>0$ $\tilde u(\delta,\psi)\approx 1$ и $\tilde v(\delta,\psi)\approx 0$ имеет единственное решение в точке $\psi^{**}=-\pi$.

Для строгого доказательства достаточно показать, что при этих $\psi$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{2}{3}\left(\operatorname{arcctg}\frac{\tilde v(\delta,\psi)}{\tilde u(\delta,\psi)}\right)'_\psi\right|<1 \text{ при } \psi\in[-\pi;0]. \quad (59)$$

При этом (58) имеет единственное решение на каждом отрезке $\left[-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right]$ и $\left[-\frac{2\pi}{3},0\right]$.

Рассмотрим $\left(\operatorname{arcctg}\frac{\tilde v(\delta,\psi)}{\tilde u(\delta,\psi)}\right)'_\psi=-\frac{\tilde v'_\psi(\delta,\psi)\tilde u(\delta,\psi)-\tilde u'_\psi(\delta,\psi)\tilde v(\delta,\psi)}{\tilde u^2(\delta,\psi)+\tilde v^2(\delta,\psi)}=$

$$=-\delta\frac{\tilde u(\delta,\psi)\tilde u'_\delta(\delta,\psi)+\tilde v(\delta,\psi)\tilde v'_\psi(\delta,\psi)}{\tilde u^2(\delta,\psi)+\tilde v^2(\delta,\psi)}=-\frac{\delta}{2}\frac{(\tilde u^2(\delta,\psi)+\tilde v^2(\delta,\psi))'_\delta}{\tilde u^2(\delta,\psi)+\tilde v^2(\delta,\psi)}=-\frac{\delta}{2}\cdot J, \quad (60)$$

где $\tilde W(\delta,\psi)$ аналитическая на $\gamma_{\eta\delta}$ функция и $\delta\cdot\tilde u'_\delta(\delta,\psi)=\tilde v'_\psi(\delta,\psi)$, $-\delta\cdot\tilde v'_\delta(\delta,\psi)=\tilde u'_\psi(\delta,\psi)$.

В дальнейшем удобно считать, что $W(\delta,\psi,\eta)=\frac{u_1(\delta,\psi,\eta)+i\cdot v_1(\delta,\psi,\eta)}{(u_a(\delta,\psi,\eta)+i\cdot v_a(\delta,\psi,\eta))^2}$, а с учетом (57)

$$J=\frac{(\tilde u^2(\delta,\psi)+\tilde v^2(\delta,\psi))'_\delta}{\tilde u^2(\delta,\psi)+\tilde v^2(\delta,\psi)}=\frac{(u^2(\delta,\psi)+v^2(\delta,\psi))'_\delta}{2(u^2(\delta,\psi)+v^2(\delta,\psi))}=\frac{1}{2}(\ln(|W(\delta,\psi,\eta)|^2)'_\delta=$$

$$=\frac{1}{2}(\ln(\frac{u_1^2(\delta,\psi)+v_1^2(\delta,\psi)}{(u_a^2(\delta,\psi)+v_a^2(\delta,\psi))^2}))'_\delta=\frac{1}{2}(\frac{(u_1^2(\delta,\psi)+v_1^2(\delta,\psi))'_\delta}{u_1^2(\delta,\psi)+v_1^2(\delta,\psi)}-2\frac{(u_a^2(\delta,\psi)+v_a^2(\delta,\psi))'_\delta}{u_a^2(\delta,\psi)+v_a^2(\delta,\psi)}).$$

$$|J|=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{(u_1^2(\delta,\psi)+v_1^2(\delta,\psi))'_\delta}{u_1^2(\delta,\psi)+v_1^2(\delta,\psi)}\right|+2\left|\frac{(u_a^2(\delta,\psi)+v_a^2(\delta,\psi))'_\delta}{u_a^2(\delta,\psi)+v_a^2(\delta,\psi)}\right|\right)\le$$

$$\le\frac{|(u_1(\delta,\psi))'_\delta|+|(v_1(\delta,\psi))'_\delta|}{\sqrt{u_1^2(\delta,\psi)+v_1^2(\delta,\psi)}}+2\frac{|(u_a(\delta,\psi))'_\delta|+|(v_a(\delta,\psi))'_\delta|}{\sqrt{u_a^2(\delta,\psi)+v_a^2(\delta,\psi)}}. \quad (61)$$

Проведем оценку компонент неравенства (61) для степенного вырождения: $a(t)=t^m, m\ge 2$.

Разлагая в ряд в окрестности $t_\lambda$ числитель и знаменатель функции $W(\delta,\psi,\eta)$, будем иметь

$$u_1(\delta,\psi)+i\cdot v_1(\delta,\psi)=1+\sum_{k=2}^{m}\bar a_k\delta^{k-1}\cos(k-1)\psi+i\sum_{k=2}^{m}\bar a_k\delta^{k-1}\sin(k-1)\psi,$$

$$u_a(\delta,\psi)+iv_a(\delta,\psi)=1+\sum_{k=1}^{m}\hat a_k(t-t_\eta)^k=1+\sum_{k=1}^{m}\hat a_k\delta^k\cos k\psi+i\sum_{k=1}^{m}\hat a_k\delta^k\sin k\psi,$$

$$\bar a_k=\frac{a^{(k)}(t_\eta)}{k!a'(t_\eta)}=\frac{(m-1)\dots(m-k+1)}{k!\cdot(t_\eta)^{k-1}},\ 2\le k\le m,\quad \hat a_k=\frac{a^{(k)}(t_\eta)}{k!a(t_\eta)}=\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!\cdot(t_\eta)^k},\ 1\le k\le m.$$

Выберем $\delta=\frac{t_\eta}{P}$, где $P>1$ некоторая постоянная величина. Тогда

$$u_1(\delta,\psi)=1+\sum_{k=2}^{m}\bar a_k\delta^{k-1}\cos(k-1)\psi=1+\sum_{k=2}^{m}\frac{(m-1)\dots(m-k+1)}{k!\cdot(t_\eta)^{k-1}}(\frac{t_\eta}{P})^{k-1}\cos(k-1)\psi,$$

$$v_1(\delta,\psi)=\sum_{k=2}^{m}\overline{a}_k\delta^{k-1}\sin(k-1)\psi=\sum_{k=2}^{m}\frac{(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!\cdot(t_\eta)^{k-1}}(\frac{t_\eta}{P})^{k-1}\sin(k-1)\psi\,,$$

$$(u_1)'_\delta(\delta,\psi)=1+\sum_{k=2}^{m}(k-1)\overline{a}_k\delta^{k-2}\cos(k-1)\psi=\sum_{k=2}^{m}(k-1)\frac{(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!\cdot(P)^{k-2}\cdot t_\eta}\cos(k-1)\psi\,,$$

$$(v_1)'_\delta(\delta,\psi)=\sum_{k=2}^{m}(k-1)\overline{a}_k\delta^{k-2}\sin(k-1)\psi\,.$$

Оценивая по модулю, получим

$$\left|(u_1)'_\delta(\delta,\psi)\right|\le\frac{C'_m}{t_\eta}\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{(P)^{k-2}}\le\frac{C'_m\cdot P}{t_\eta(P-1)},\ C'_m=\max_k(k-1)\frac{(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}\,,$$

$$\left|(v_1)'_\delta(\delta,\psi)\right|\le\frac{C'_m}{t_\eta}\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{(P)^{k-2}}\le\frac{C'_m\cdot P}{t_\eta(P-1)}\,,$$

$$\sqrt{u_1^2(\delta,\psi)+v_1^2(\delta,\psi)}\ge\left|u_1(\delta,\psi)\right|=\left|1+\sum_{k=2}^{m}\frac{(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!\cdot(t_\eta)^{k-1}}(\frac{t_\eta}{P})^{k-1}\cos(k-1)\psi\right|\ge$$

$$\ge1-\sum_{k=2}^{m}\frac{(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!\cdot P^{k-1}}\ge1-\frac{\overline{C}_m}{P-1}\ge\frac{1}{2},\ \overline{C}_m=\max_k\frac{(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}\le C'_m,$$

при $P\ge2\overline{C}_m+1$.

Аналогично для $u_a(\delta,\psi)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\hat{a}_k\delta^k\cos k\psi,\quad v_a(\delta,\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\hat{a}_k\delta^k\sin k\psi$ получим

$$u_a(\delta,\psi)=1+\sum_{k=1}^{m}\hat{a}_k\delta^k\cos k\psi=1+\sum_{k=1}^{m}\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!\cdot(t_\eta)^k}(\frac{t_\eta}{P})^k\cos k\psi\,,$$

$$v_a(\delta,\psi)=\sum_{k=1}^{m}\hat{a}_k\delta^k\sin k\psi=\sum_{k=1}^{m}\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!\cdot(t_\eta)^k}(\frac{t_\eta}{P})^k\sin k\psi\,,$$

$$(u_a)'_\delta(\delta,\psi)=\sum_{k=1}^{m}k\hat{a}_k\delta^{k-1}\cos k\psi=\sum_{k=1}^{m}\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{(k-1)!\cdot t_\eta\cdot P^{k-1}}\cos k\psi\,,$$

$$(v_a)'_\delta(\delta,\psi)=\sum_{k=1}^{m}k\hat{a}_k\delta^{k-1}\sin k\psi=\sum_{k=1}^{m}\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{(k-1)!\cdot t_\eta\cdot P^{k-1}}\sin k\psi\,,$$

$$\left|(u_a)'_\delta(\delta,\psi)\right|\le\sum_{k=1}^{m}\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{(k-1)!\cdot t_\eta\cdot P^{k-1}}\le\frac{P\cdot C'^a_m}{t_\eta(P-1)},\ C'^a_m=\max_k\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{(k-1)!}\,,$$

$$\left|(v_a)'_\delta(\delta,\psi)\right|\le\sum_{k=1}^{m}\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{(k-1)!\cdot t_\eta\cdot P^{k-1}}\le\frac{P\cdot C'^a_m}{t_\eta(P-1)},\ \ C'_m=\max_k(k-1)\frac{(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}\,,$$

$$\left|u_a(\delta,\psi)\right|\ge1-\sum_{k=1}^{m}\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!\cdot(t_\eta)^k}(\frac{t_\eta}{P})^k\ge1-\frac{C^a_m}{P-1}\ge\frac{1}{2}\,,$$

при $\dfrac{C^a_m}{P-1}\le\dfrac{1}{2}, P\ge2C^a_m+1,\ C^a_m=\max\limits_k\dfrac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}<C'^a_m,$

$$\sqrt{u_a^2(\delta,\psi)+v_a^2(\delta,\psi)}\ge\left|u_a(\delta,\psi)\right|\ge\frac{1}{2},\ \text{при}\ P\ge\max\{2C_m+1,2C^a_m+1\}\,.$$

Что с учетом (60) и (61) приводит к неравенству

$$\left|\frac{2}{3}\left(\operatorname{arcctg}\frac{\widetilde{v}(\delta,\psi,\eta)}{\widetilde{u}(\delta,\psi,\eta)}\right)'_{\psi}\right| = \left|\frac{\delta}{3}\cdot J\right| \le \frac{\delta}{3}\left(\frac{|(u_1(\delta,\psi))'_\delta| + |(v_1(\delta,\psi))'_\delta|}{\sqrt{u_1^2(\delta,\psi)+v_1^2(\delta,\psi)}} + 2\frac{|(u_a(\delta,\psi))'_\delta| + |(v_a(\delta,\psi))'_\delta|}{\sqrt{u_a^2(\delta,\psi)+v_a^2(\delta,\psi)}}\right) \le$$

$$\le \frac{2}{3}\delta\left(2\frac{C'_m\cdot P}{t_\eta(P-1)} + 4\frac{P\cdot C_m^a}{t_\eta(P-1)}\right) = \frac{4}{3}\frac{C'_m + 2C_m^a}{P-1} < 1$$

при $\delta = \dfrac{t_\eta}{P}$ и $P \ge 2C_m + 1$, $P \ge 2C_m^a + 1$, $P > \dfrac{4}{3}(C'_m + 2C'^a_m) + 1$.

Пусть $P^* = 5C'^a_m + 1$, $\delta^* = \dfrac{t_\eta}{P^*}$, тогда $\left|\dfrac{2}{3}\left(\operatorname{arcctg}\dfrac{\widetilde{v}(\delta^*,\psi,\eta)}{\widetilde{u}(\delta^*,\psi,\eta)}\right)'_{\psi}\right| < 1$.

Таким образом первая часть условия 4 выполнена при $\delta = \delta^* = \dfrac{t_\eta}{P^*}$. Покажем, что при надлежащем выборе $\delta$ выполняется и вторая часть условия 4. Пусть как и раньше при $\eta = c - \lambda$

$$\mu(\eta) = \varepsilon(0,1) = \int_0^1 |h(t,\eta)|\,dt,$$

$$h(t,\eta) = \frac{\alpha^{-1}(t,\eta)}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}a\left(\frac{2\alpha\alpha'}{\alpha^2}\right)^2 - \left(a\frac{2\alpha\alpha'}{\alpha^2}\right)'\right) = \frac{\alpha^{-1}(t,\eta)}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}a\left(\frac{(\alpha^2)'}{\alpha^2}\right)^2 - \left(a\frac{(\alpha^2)'}{\alpha^2}\right)'\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(b^2 - 4t^m\cdot\eta)^{-1/2}\left(\frac{1}{4}t^m\left(\frac{-4mt^{m-1}\eta}{(b^2-4t^m\cdot\eta)}\right)^2 + \left(t^m\frac{4mt^{m-1}\eta}{(b^2-4t^m\cdot\eta)}\right)'\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(b^2 - 4t^m\cdot\eta)^{-1/2}\left(\frac{4m^2t^{3m-2}\eta^2}{(b^2-4t^m\cdot\eta)^2} - \frac{4mt^{2m-1}\eta(-4mt^{m-1}\eta)}{(b^2-4t^m\cdot\eta)^2} + \frac{4m(2m-1)t^{2m-2}\eta}{(b^2-4t^m\cdot\eta)}\right) =$$

$$= \frac{m^2t^{3m-2}\eta^2 + mt^{2m-1}\eta(4mt^{m-1}\eta)}{(b^2-4t^m\cdot\eta)^{5/2}} + \frac{m(2m-1)t^{2m-2}\eta}{(b^2-4t^m\cdot\eta)^{3/2}} = \frac{5m^2t^{3m-2}\eta^2}{(b^2-4t^m\cdot\eta)^{5/2}} + \frac{m(2m-1)t^{2m-2}\eta}{(b^2-4t^m\cdot\eta)^{3/2}}.$$

Проверим, что $\mu(\eta) = \int_0^1 |h(t,\eta)|\,dt \xrightarrow[\eta\to+\infty]{} 0$. В соответствии с видом пути интегрирования рассмотрим три составляющие интеграла $\mu(\eta) = \mu_1(\eta) + \mu_2(\eta) + \mu_3(\eta)$, где

$$\mu_1(\eta) = \int_0^{t_{\eta\delta}^-} |h(t,\eta)|\,dt,\quad \mu_2(\eta) = \int_{t_{\eta\delta}^-}^{t_{\eta\delta}^+} |h(t,\eta)|\,dt,\quad \mu_3(\eta) = \int_{t_{\eta\delta}^+}^1 |h(t,\eta)|\,dt.$$

Непосредственные преобразования показывают, что для $m > 1$ и $\Lambda > 1$, $\Lambda = \dfrac{m}{2} > \dfrac{m}{3}$

$\mu_1(\eta) = O\left(\left(\dfrac{1}{\eta}\right)^{(m-1)/m}\right)$ при $\eta \to +\infty$; $\mu_2(\eta) = O\left(\left(\dfrac{1}{\eta}\right)^{(m-1)/m}\right)$ при $\eta \to +\infty$ и $m > 1$; для $m > 2$ $\mu_3(\eta) \le O\left(\left(\dfrac{1}{\eta}\right)^{1)/2}\right) + O\left(\left(\dfrac{1}{\eta}\right)^{(m-1)/m}\right)$ при $\eta \to +\infty$; для $m = 2$ $\mu_3(\eta) \le \dfrac{O(\ln\eta)}{\eta^{1/2}}$ при $\eta \to +\infty$.

Например, для $m > 2$ оценка $\mu_3(\eta)$ получается следующим образом:

$$0<\mu_3(\eta)=\int\limits_{t_{\eta\delta}^{+}}^{1}\left|h(t,\eta)\right|dt=\int\limits_{t_{\eta\delta}^{+}}^{1}\left(\frac{5m^2t^{3m-2}\eta^2}{(4t^m\cdot\eta-b^2)^{5/2}}+\frac{m(2m-1)t^{2m-2}\eta}{(4t^m\cdot\eta-b^2)^{3/2}}\right)dt=$$

$$=\frac{-5m\cdot\eta}{6}\frac{t^{2m-1}}{(4t^m\cdot\eta-b^2)^{3/2}}\Bigg|_{t=t_{\eta\delta}^{+}}^{t=1}+\frac{5m(2m-1)\cdot\eta}{6}\int\limits_{t_{\eta\delta}^{+}}^{1}\frac{t^{2m-2}}{(4t^m\cdot\eta-b^2)^{3/2}}dt+\int\limits_{t_{\eta\delta}^{+}}^{1}\frac{m(2m-1)t^{2m-2}\eta}{(4t^m\cdot\eta-b^2)^{3/2}}dt=$$

$$=\frac{5m\cdot\eta}{6}\left(\frac{\left(\left(\frac{b^2}{4\eta}\right)^{1/m}\left(1+\frac{1}{\Lambda}\right)\right)^{2m-1}}{\left(4\left(\left(\frac{b^2}{4\eta}\right)^{1/m}\left(1+\frac{1}{\Lambda}\right)\right)^{m}\cdot\eta-b^2\right)^{3/2}}-\frac{1}{(4\cdot\eta-b^2)^{3/2}}\right)+J_2=O\left(\left(\frac{1}{\eta}\right)^{(m-1)/m}\right)+J_2,\text{ при } \eta\to+\infty,$$

где $J_2=\dfrac{11m(2m-1)\cdot\eta}{6}\displaystyle\int\limits_{t_{\eta\delta}^{+}}^{1}\frac{t^{2m-2}}{(4t^m\cdot\eta-b^2)^{3/2}}dt$ .

Интегрируя по частям, получим

$$J_2=\frac{11(2m-1)}{-12}\left(\frac{t^{m-1}}{(4t^m\cdot\eta-b^2)^{1/2}}\Bigg|_{t=t_{\eta\delta}^{+}}^{t=1}-\int\limits_{t_{\eta\delta}^{+}}^{1}\frac{(m-1)t^{m-2}}{(4t^m\cdot\eta-b^2)^{1/2}}dt\right)=$$

$$=\frac{11(2m-1)}{12}\left(\frac{\left(\frac{b^2}{4\eta}\right)^{(m-1)/m}\left(1+\frac{1}{\Lambda}\right)^{m-1}}{|b|\left(\left(1+\frac{1}{\Lambda}\right)^{m}-1\right)^{1/2}}-\frac{1}{(4\eta-b^2)^{1/2}}\right)+J_1=O\left(\left(\frac{1}{\eta}\right)^{(m-1)/m}\right)+J_1$$

и после замены переменной интегрирования будем иметь

$$b_1^2=\frac{b^2}{4\eta},\ t^m-b_1^2=\tau, t=(\tau+b_1^2)^{1.b}, dt=\frac{1}{m}(\tau+b_1^2)^{(1-b)b}d\tau,\ \tau_\eta=b_1^2\left(\left(1+\frac{1}{\Lambda}\right)^{b}-1\right)\to 0,$$

$$0<J_1=\frac{11(2m-1)(m-1)}{12}\int\limits_{t_{\eta\delta}^{+}}^{1}\frac{t^{m-2}}{(4t^m\cdot\eta-b^2)^{1/2}}dt=\frac{11(2m-1)(m-1)}{12(4\eta)^{1/2}}\int\limits_{t_{\eta\delta}^{+}}^{1}\frac{t^{m-2}}{(t^m-b_1^2)^{1/2}}dt=$$

$$=\frac{11(2m-1)(m-1)}{12m(4\eta)^{1/2}}\int\limits_{\tau_\eta}^{1-b_1^2}\frac{d\tau}{\tau^{1/2}(\tau+b_1^2)^{1/m}}\le\frac{11(2m-1)(m-1)}{12m(4\eta)^{1/2}}\int\limits_{\tau_\eta}^{1-b_1^2}\frac{d\tau}{\tau^{1/2+1/m}}=O\left(\left(\frac{1}{\eta}\right)^{1/2}\right)\text{ при } \eta\to+\infty.$$

Таким образом, при $\eta\to+\infty$ $0<\mu_3(\eta)\le O\left(\left(\frac{1}{\eta}\right)^{(m-1)/m}\right)+O\left(\left(\frac{1}{\eta}\right)^{1/2}\right)$ при $m>2$ и, окончательно, $0<\mu(\eta)\le O\left(\left(\frac{1}{\eta}\right)^{(m-1)/m}\right)$ при $m>2$, $\mu(\eta)\le\dfrac{O(\ln\eta)}{\eta^{1/2}}$ при $\eta\to+\infty$ и вторая часть условия 4 выполняется для $a(t)=t^m$ при $m\ge 2$ и $\delta=\dfrac{t_\eta}{\Lambda}$, где $\Lambda=\dfrac{2m}{3}$ (в оценке $\mu_2(\eta)$).

Вернемся к уравнению (56) для определения собственных значений при $a(t)=t^m$. Имеем

$$\int_{t_{\eta k}}^{1} \frac{\sqrt{4t^m (c-\lambda_k)-b^2}}{t^m} dt + \frac{\pi}{2} - 2\pi k = o(1),\ k \to +\infty . \tag{56}$$

Обозначим $c-\lambda_k = \eta_k$ и рассмотрим поведение интеграла $\int_{t_{\eta k}}^{1} \frac{\sqrt{4t^m \eta_k - b^2}}{t^m} dt$ при $\eta_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$.

При $m > 2$ справедливы равенства

$$\int_{t_{\eta k}}^{1} \frac{\sqrt{4t^m \eta_k - b^2}}{t^m} dt \quad \left( 4t^m \eta_k - b^2 = \tau, t = (4\eta_k)^{-1/m} (1+\tau)^{1/m}, dt = (4\eta_k)^{-1/m} \frac{1}{m} (b^2+\tau)^{1/m-1} d\tau \right) =$$

$$= (4\eta_k)^{-1/m} \frac{1}{m} \int_0^{4\eta_k - b^2} \frac{\sqrt{\tau}}{((4\eta_k)^{-1/m} (b^2+\tau)^{1/m})^m} (b^2+\tau)^{1/m-1} d\tau = (4\eta_k)^{1-1/m} \frac{1}{m} \int_0^{4\eta_k - b^2} \frac{\sqrt{\tau}}{(b^2+\tau)^{2-1/m}} d\tau =$$

$$= (4\eta_k)^{1-1/m} \frac{1}{m} \left( \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\tau}}{(b^2+\tau)^{2-1/m}} d\tau - \int_{4\eta_k - b^2}^{\infty} \frac{\sqrt{\tau}}{(b^2+\tau)^{2-1/m}} d\tau \right) = C_m \cdot \eta_k^{1-1/m} (1 + \hat{C}_m(\eta_k)), \left|\hat{C}_m(\eta_k)\right| = o(1)$$

при $\eta_k \to +\infty$, $\quad C_m = \frac{1}{m} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\tau}}{(b^2+\tau)^{2-1/m}} d\tau = \frac{1}{m|b|^{1-2/m}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\tau}}{(1+\tau)^{2-1/m}} d\tau = \frac{B(3/2,(m-2)/(2m))}{m|b|^{1-2/m}}$,

а при $m = 2$ –

$$\int_{t_{\eta k}}^{1} \frac{\sqrt{4t^m \eta_k - b^2}}{t^m} dt = (4\eta_k)^{1/2} \frac{1}{2} \int_0^{4\eta_k - b^2} \frac{\sqrt{\tau}}{(b^2+\tau)^{3/2}} d\tau = \eta_k^{1/2} \int_0^{4\eta_k - b^2} \frac{\sqrt{\tau}}{(b^2+\tau)^{1/2}} \frac{d\tau}{(b^2+\tau)} =$$

$$= \eta_k^{1/2} \left( \int_0^{4\eta_k - b^2} \frac{d\tau}{b^2+\tau} - \int_0^{4\eta_k - b^2} \frac{b^2 d\tau}{(b^2+\tau)^{3/2}(\sqrt{\tau} + \sqrt{b^2+\tau})} \right) = \eta_k^{1/2} (\ln \eta_k + O(1)).$$

Таким образом, если числовая последовательность $\{\eta_k\}, \eta_k \to +\infty$ такова, что удовлетворяет уравнению (56) при $a(t) = t^m$ и $\int_{t_{\eta k}}^{1} \frac{\sqrt{4t^m \eta_k - b^2}}{t^m} dt = 2\pi k - \frac{\pi}{2} + o(1)$ при $k \to +\infty$, то для неё выполняются следующие асимптотические соотношения:

1) при $m > 2$ $C_m \cdot \eta_k^{(m-1)/m} (1 + \hat{C}_m(\eta_k)) = 2\pi k - \frac{\pi}{2} + o(1)$, $\quad C_m = \frac{1}{m} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\tau}}{(b^2+\tau)^{2-1/m}} d\tau$, $\left|\hat{C}_m(\eta_k)\right| = o(1)$,

$$C_m \cdot \eta_k^{(m-1)/m} = \left( 2\pi k - \frac{\pi}{2} \right)(1+o(1)), \qquad \eta_k^{(m-1)/m} = \left( \frac{2\pi}{C_m} k - \frac{\pi}{2C_m} \right)(1+o(1)) \ ;$$

2) при $m = 2$ $\quad \eta_k^{1/2} (\ln \eta_k + O(1)) = 2\pi k - \frac{\pi}{2} + o(1)$.

Для собственных значений $\lambda_k = c - \eta_k \to -\infty$ при $k \to +\infty$ имеют место соотношения:

1) при $m > 2$ $\quad \lambda_k = -\left( \frac{2\pi}{C_m} k - \frac{\pi}{2C_m} \right)^{m/(m-1)} (1+o(1)) = -\left( \frac{2\pi}{C_m} \right)^{m/(m-1)} k^{m/(m-1)} (1+o(1)) \quad k \to +\infty$;

2) при $m = 2$ $\quad |\lambda_k|^{1/2} \cdot \ln|\lambda_k| = 2\pi k + O(1), k \to +\infty$.

Полученные оценки и завершают доказательство теоремы 4.

**Замечание 6.** 1) Результаты работы позволяют получать аналогичные асимптотические формулы роста собственных значений и для вырождений функции $a(t)$ другого вида. 2) Такие же асимптотические формулы получаются для собственных значений задачи (38), (40) при $b > 0$.

***Работа подготовлена в рамках выполнения проекта №9.101.2014/К государственного задания Орловскому государственному университету имени И.С. Тургенева.***

## Список литературы

1. Архипов В.П., Глушак А.В. 2016. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, №20 (241). Выпуск 44: 5–22.

Arhipov V.P., Glushak A.V. 2016. Degenerating Second-Order Differential Equations. Asymptotic Representations of Solutions. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics, №20 (241), Выпуск 44: 5–22.

2. Глушко В.П. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. II, III. Дифференц. Уравнения. 1968. (Т.4. №11). 1969. (Т.5. №3).

Glushko V.P. Degenerating Linear Differential Equations. II,III. Differential Equations. 1968. V. 4. № 11. Pp. 1956–1966; 1968. V. 5. № 3. Pp. 443–455.

3. Розов Н.Х., Сушко В.Г., Чудова Д.И. 1998. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. Фундаментальная и прикладная математика, Т. 4, № 3: 1063–1095.

Rosov N.Kh., Sushko V.G., Chudova D.I. 1998. Differential Equations with a Degenerate Coefficient Multiplying the Highest Derivative. Fundam. Prikl. Matem., V.4, № 3: 1063–1095.

4. Архипов В.П. 2011. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. Дифференц. Уравнения, Т. 47, № 10: 1383–1393.

Arkhipov V.P. 2011. Linear Second-Order Differential Equations with Degenerating Coefficient of the Second Derivative. Differential Equations, V. 47, № 10: 1383–1393.

5. Архипов В.П., Соболев А.В. 1984. Осцилляционные свойства вырождающихся дифференциальных операторов второго порядка. ДАН СССР, Т. 275, №4: 777–779.

Arkhipov V.P., Sobolev A.V. 1984. Oscillation Properties of Degenerate Second-Order Differential Operators. Dokl. Akad. Nauk SSSR, V. 257, №4: 777–779.